NOMBRE Y APELLIDO:

Justificar todas las respuestas.

Para aprobar son necesarios al menos 45 puntos, que corresponden a la nota 4 (cuatro).

Ejercicio 1. *(20 pts.)*

(a) Sea $M_n(\mathbf{k})$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbf{k}$ y sea $S \subseteq M_n(\mathbf{k})$ el subconjunto de matrices de traza igual a cero. Mostrar que S es un subespacio vectorial.

(Recordar que la traza de una matriz $A = (a_{ij})_{i,j}$ es la suma $\sum_i a_{ii}$ de los elementos de la diagonal.)

(b) Sean V_1 y V_2 los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = \langle (1,0,1,0), (1,1,1,1) \rangle, \quad V_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w - y = 0, x + z = 0\}.$$

Calcular la dimensión de $V_1 \cap V_2$ y de $V_1 + V_2$.

(c) Sea $V = P_4$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios de grado menor a 4. Sean $p_1(x) = 1 + x^2$ y $p_2(x) = x - x^3$ en P_4. Completar el conjunto $\{p_1(x), p_2(x)\}$ a una base de V.

Ejercicio 2. *(20 pts.)* Sea $\mathcal{B} = \{(1,i,0), (1-i,0,1), (1+i,0,1)\} \subset \mathbb{C}^3$.

Sea $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la base canónica.

(a) Mostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(b) Hallar las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

(c) Dar las coordenadas del vector $(1,1,i)$ en la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 3. *(20 pts.)* Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x+y, x+y+z)$.

(a) Probar que T es una transformación lineal.

(b) Describir implícitamente el núcleo de T.

(c) Dar una base de la imagen.

Ejercicio 4. *(20 pts.)*

(a) Definir una transformación lineal invertible $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de manera tal que $T(1,1) = (1,0)$.

(b) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T en la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(c) Calcular $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

Ejercicio 5. *(20 pts.)* Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar o dar un contraejemplo según el caso.

(a) Sea V un subespacio vectorial de un espacio vectorial U. Entonces $V+V=V$.

(b) Sea $T \in L(V)$ tal que $T^2=0$. Entonces T no es invertible.

(c) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $T:\mathbb{R}^3 \to V$ una transformación lineal inyectiva. Entonces T es suryectiva.

(d) Sea A una matriz $n \times n$ tal que $\det A \neq 0$. Entonces $\det(A^k) \neq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio	1	2	3	4	5	**Total**
Nota						